$\ast$ Théorème :

Hypothèses : (H) $\mathbb{Q}_+^*$

Thèse : (T) $\nexists x \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $x^2 = 2$

démonstration : (D) posons $x = \frac{a}{b}$ et $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

avec $\frac{a}{b}$ irréductible $\Leftrightarrow$ a et b premiers entre eux

Ainsi : $x^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2$

$\Leftrightarrow a^2 = 2b^2$

Nous allons démontrer que l'on ne peut pas trouver 2 nombres a et b dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux tels que $a^2 = 2b^2$.

On va raisonner sur la parité de a et de b :

4 cas à envisager :

1) a et b sont pairs : impossible car elle serait non irréductible.

2) a pair et b impair :

On pose : $a = 2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

et $b = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$

alors : $a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow (2n)^2 = 2(2k+1)^2 \Leftrightarrow \cancel{4}^{2} n^2 = \cancel{2}(2k+1)^2$

$\Leftrightarrow \underbrace{2n^2}_{\text{pair}} = \underbrace{(2k+1)^2}_{\text{impair}}$ car $(2k+1)^2 = \underbrace{\underbrace{4k^2+4k}_{\text{pair}}+1}_{\text{impair}}$

donc ce cas est impossible

3) a impair et b pair
4) a impair et b impair

$\Big\}$ alors $\underbrace{a^2}_{\text{impair}} = 2\underbrace{b^2}_{\text{pair}}$ imposs.

cqfd